

3.6 Zlatý řez

Zlatým řezem rozumíme rozdělení úsečky libovolné délky na dvě části tak, že poměr délek delší části úsečky ku kratší je stejný jako poměr délky celé úsečky k délce její delší části (obr. 1). Situaci můžeme popsat matematicky. Má-li daná úsečka AB délku a , existuje bod C , který tuto úsečku dělí na dvě části o délkách x a $a - x$ (kde $x > a - x$), přičemž platí

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

Budeme-li a považovat za jednotku délky, vyjde kladný kořen x roven hodnotě $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Poměr $\frac{a}{x}$ bývá často nazýván zlaté číslo a značí se řeckým písmenem φ . Pro a rovno jedné je φ převrácenou hodnotou x , tedy

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

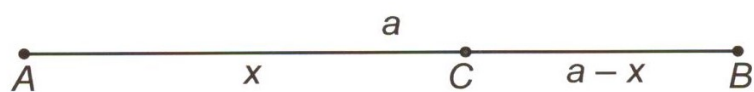
Zlatý obdélník je takový obdélník, pro jehož rozměry a, b platí $\frac{a}{b} = \varphi$.

Oddělíme-li od tohoto obdélníku čtverec o straně b , zbylý obdélník bude opět zlatý. V oddělování čtverců můžeme pokračovat dále. Postupně dostaneme body $E, F, G, H, I, \dots$ vyznačující zlaté řezy na delších stranách získaných obdélníků (obr. 3). Těmito body lze proložit křivku nazývanou zlatá spirála (jedná se o speciální případ logaritmické spirály – obr. 2). Pól P této spirály je průsečíkem úhlopříčky původního obdélníku s úhlopříčkou menšího zlatého obdélníku získaného prvním oddělením čtverce.

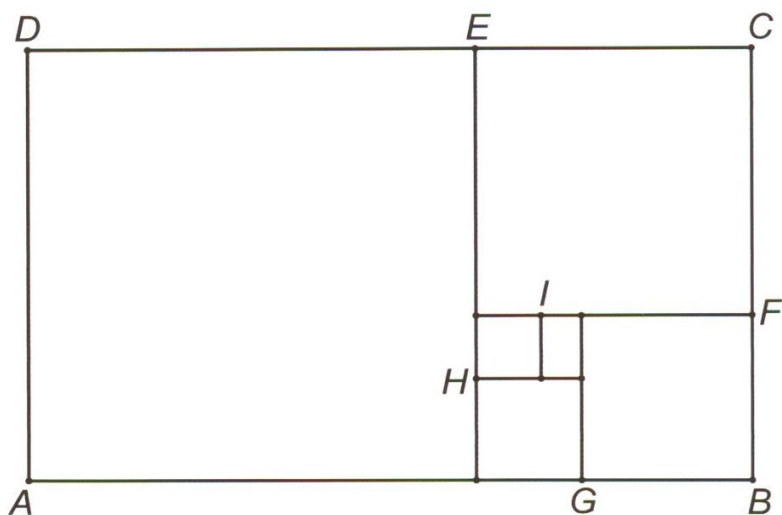
Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník, jehož úhly při základně měří 72° (a tedy úhel proti základně měří 36°). Poměr délky ramene k délce základny je roven zlatému číslu (obr. 4). Od tohoto trojúhelníku lze oddělovat stále menší zlaté trojúhelníky, délka ramene nového trojúhelníku je vždy shodná s délkou základny trojúhelníku předchozího. Krajiními body základů takto vzniklých trojúhelníků lze opět proložit logaritmickou spirálu, jejíž pól P je průsečíkem těžnice prvního trojúhelníku s těžnicí druhého trojúhelníku. Logaritmické spirály vepsané do zlatých obdélníků a trojúhelníků lze téměř přesně nahradit křivkou složenou z oblouků kružnic (obrázky 5 a 6).

Se zlatým řezem velmi úzce souvisí i **pravidelný pětiúhelník**, ve kterém nalezneme zlatý řez hned několikrát. Průsečík dvou úhlopříček pravidelného pětiúhelníku dělí každou z nich v poměru zlatého řezu (obr. 7). Dále platí, že poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo. Sestrojíme-li všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu, uvnitř které je opět pravidelný pětiúhelník, přičemž poměr délek stran původního a nového pětiúhelníku je druhou mocninou zlatého čísla (obr. 8).

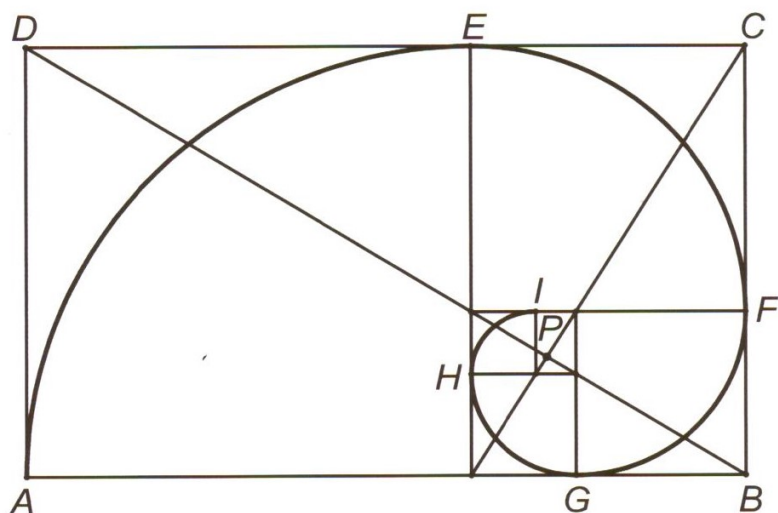
Zlatý řez najdeme i ve stereometrii, například na pravidelném dvanáctistěnu. Stěny dvanáctistěnu jsou tvořeny shodnými pravidelnými pětiúhelníky. Navíc lze do dvanáctistěnu vepsat tři navzájem kolmé zlaté obdélníky tak, že jejich vrcholy leží ve středech stěn pravidelného dvanáctistěnu (obr. 9). Do pravidelného dvacetistěnu lze vepsat tři kolmé zlaté obdélníky tak, že jejich vrcholy jsou současně vrcholy dvacetistěnu (obr. 10). Poměry zlatého řezu lze však nalézt i na dalších tělesech.



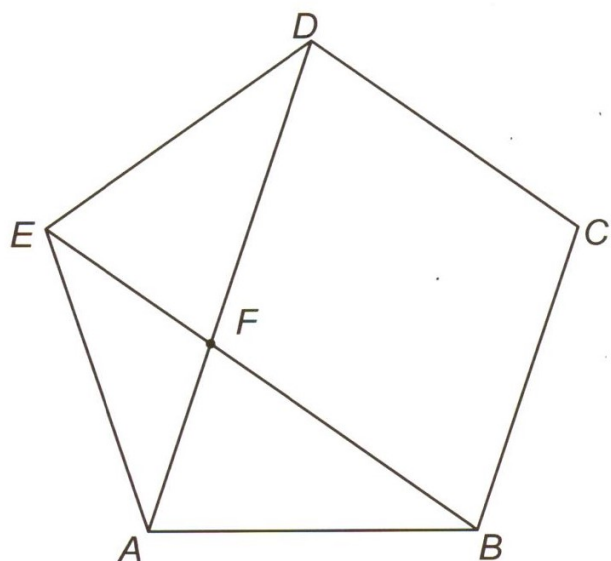
Obr. 1: Rozdělení úsečky ve zlatém řezu



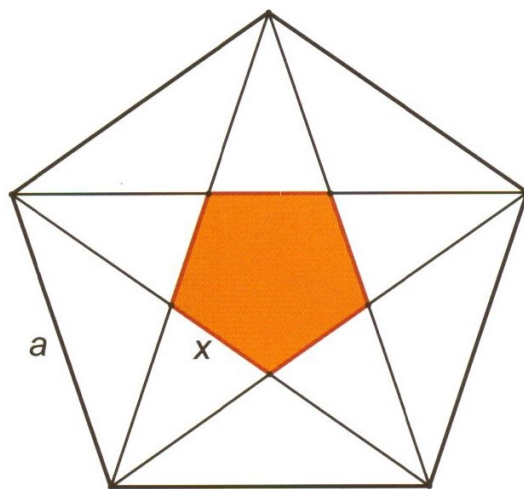
Obr. 3: Zlatý obdélník a vepsané čtverce



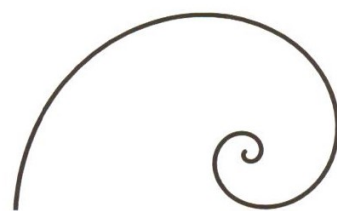
Obr. 5: Logaritmická spirála z oblouků kružnic



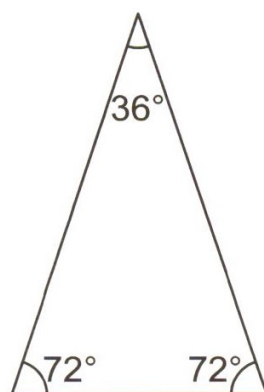
Obr. 7: Bod F dělí úhlopříčky AD , BE ve zlatém řezu



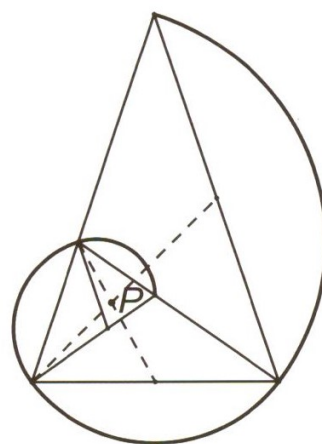
Obr. 8: Podíl délek a, x je φ^2



Obr. 2: Logaritmická spirála



Obr. 4: Zlatý trojúhelník



Obr. 6: Logaritmická spirála z oblouků kružnic

Zlatý řez má v dějinách lidstva dlouhou historii. Jeho možná nejstarší definice se dochovala v díle *Základy* (řecky *Stoicheia*) řeckého matematika Eukleida (žil okolo roku 300 př. n. l.), který zlatý řez nazýval poměrem krajním a středním. Úlohy a matematická tvrzení související se zlatým řezem se objevují i v mnoha dalších pracích významných starověkých a středověkých matematiků. Z období starověku jmenujme například Héróna z Alexandrie (asi 10–70 n. l.) nebo Pappa z Alexandrie (1. pol. 4. st. n. l.). Ve středověku zaznamenal zlatý řez rozkvět zejména v období renesance. Mimo jiné se o to zasloužili italský malíř Piero della Francesca (asi 1415–1492) a italský mnich Luca Pacioli (1445–1571), který o zlatém řezu hovořil jako o božské proporci. Samotný název „zlatý řez“ se však v literatuře objevil až v 19. století.

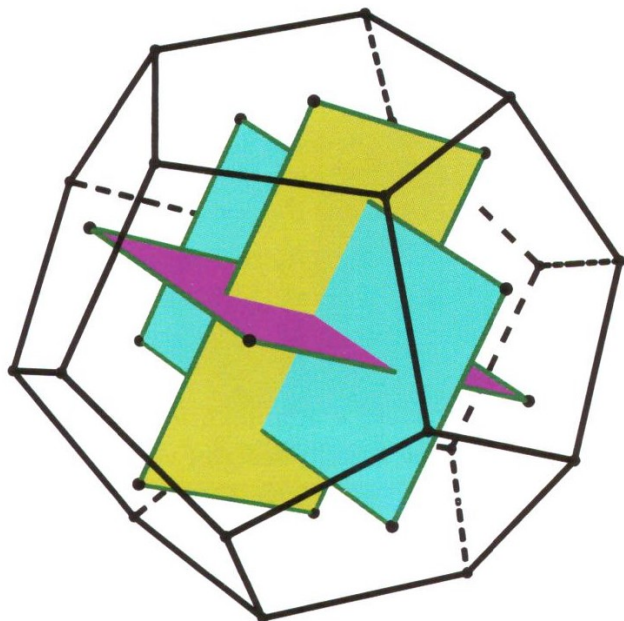
Někteří badatelé se zabývají výskytem zlatého řezu a dalších číselných zákonitostí v přírodě. Například na schránkách určitých druhů měkkýšů se vyskytují téměř dokonalé (se zlatým číslem související) logaritmické spirály. Příkladem takového živočicha je hlavonožec loděnka hlubinná (nautilus pompilius). Logaritmické spirály můžeme pozorovat také v terči slunečnice (obr. 11) nebo v seskupení hvězd některých galaxií.

Přeměřením velkého počtu rostlin dospěli vědci k závěru, že růst listů na stonku lze v mnoha případech popsat pomocí Fibonacciho posloupnosti. Každé číslo této posloupnosti je součtem dvou čísel předcházejících, přičemž za první dvě čísla uvažujeme jedničky. Fibonacciho posloupnost velmi úzce souvisí se zlatým řezem – limitou podílů sousedních členů této posloupnosti je totiž zlaté číslo. Listy vyrůstají postupně za sebou tak, že jimi lze proložit spirálu (tzv. genetická spirála), přičemž počet otoček spirály mezi dvěma listy rostoucími nad sebou i počet listů vyrůstajících ze stonku na tomto úseku jsou čísla Fibonacciho posloupnosti. Navíc listy často vyrůstají nad sebou tak, aby měly dostatek světla, vláhy i vzduchu. Každý nový list proto bývá pootočen o určitý (tzv. divergenční) úhel oproti listu předchozímu (obr. 12). Velikost tohoto úhlu je často $137,5^\circ$. Tuto hodnotu přibližně získáme, vydělíme-li 360° číslem φ^2 . Proto bývá zmíněný úhel nazýván zlatým.

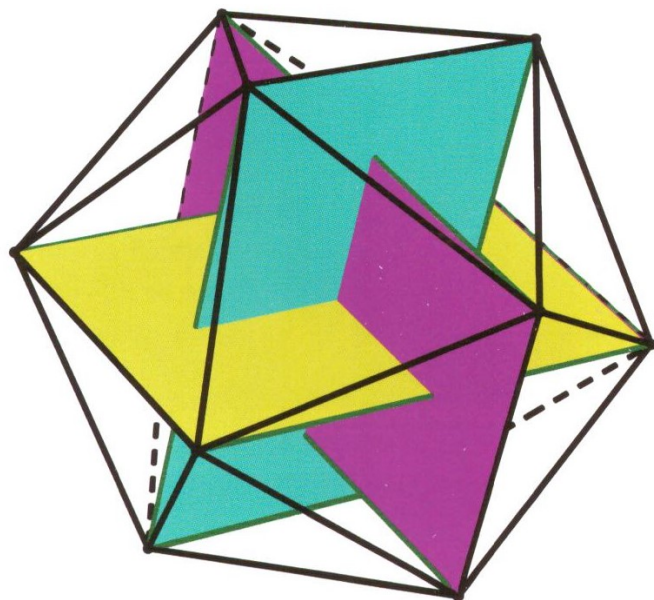
Mnoho květin má rozmístěné okvětní plátky do tvaru pravidelného pětiúhelníku (květy ovocných stromů, planá růže, blatouch, pomněnka aj.). Útvar připomínající pěticípou hvězdu nalezneme také v rozkrojeném jablku (obrázky 13, 14, 15, 16 a 17).

Zlatý řez byl a je mnoha lidmi považován za ideál krásy a harmonie. Jeho příznivci hledali poměry zlatého řezu i na lidském těle. Například Adolf Zeising (1810–1876), Charles Édouard Jeanneret (1887–1965, pseudonym Le Corbusier) nebo Ernst Neufert (1900–1986). Zlatý řez se stal také předmětem výzkumů v oblasti experimentální estetiky. Přibližně v polovině 19. století zkoumal Gustav Theodor Fechner (a po něm i další), zda je zlatý obdélník skutečně tím nejkrásnějším obdélníkem. Prohlédněte si obdélníky po levé straně textu. Který se vám nejvíce líbí? (Zlatý obdélník je na první stránce čtvrtý shora.)

Dnes jsou přibližné poměry zlatého řezu uplatňovány například v digitální fotografii či v architektuře.



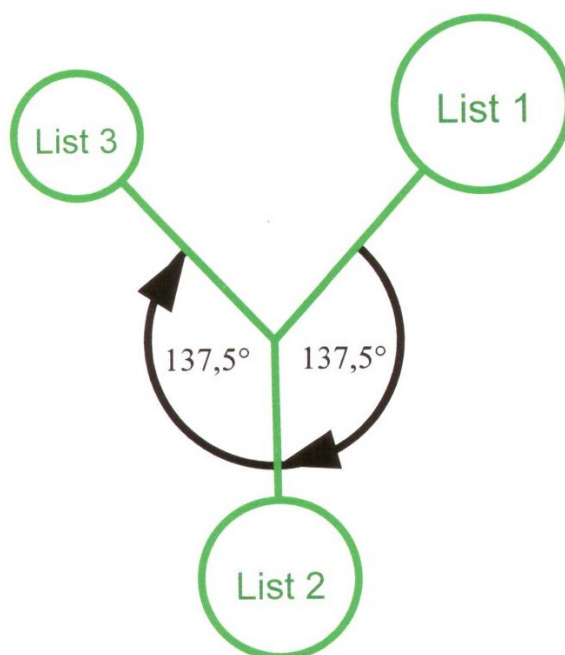
Obr. 9: Zlaté obdélníky vepsané do pravidelného dvanáctistěnu



Obr. 10: Zlaté obdélníky vepsané do pravidelného dvacetistěnu



Obr. 11: Terč slunečnice



Obr. 12: Divergenční úhel (růst listů na stonku – pohled shora)



Obr. 13: Rozkrojené jablko



Obr. 14: Kakost luční



Obr. 15: Květ hrušně

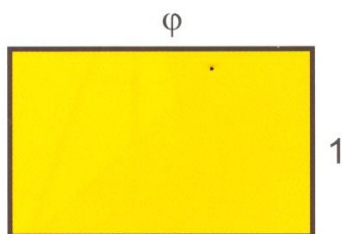


Obr. 16: Květ jabloně

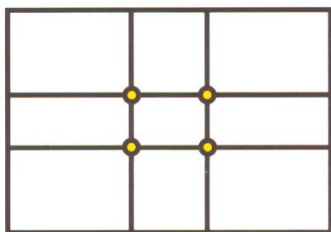


Obr. 17: Planá růže

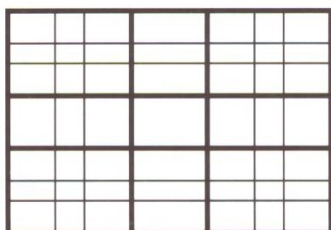
3.7 Požehnané poměry



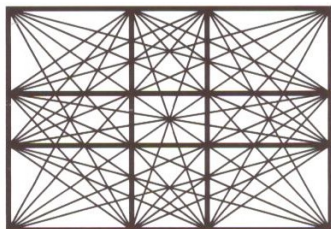
Obr. 1: Zlatý obdélník



Obr. 2: Zlaté linie a body



Obr. 3: Zjemnění síť



Obr. 4: Síť úhlopříček

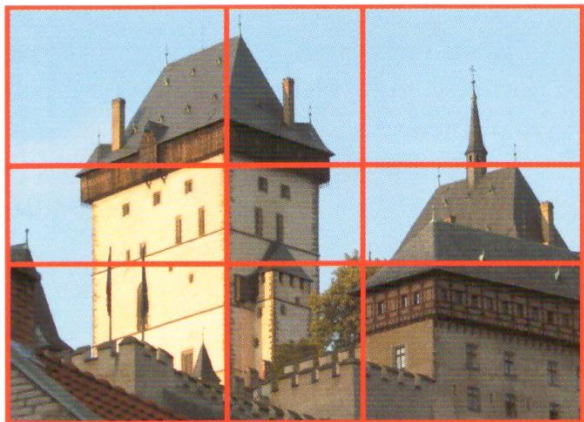
Je možné změřit krásu? Existuje vzorec pro posouzení estetické hodnoty uměleckého díla? Lze spočítat proporce díla tak, aby bylo oku lahodící? Můžeme pomocí matematiky porovnávat, co je hezčí více a co méně? Vnímání krásy je u každého člověka ovlivněno mnoha hledisky a navíc je velmi subjektivní. Přesto se lidé již celá staletí snaží tento vztah exaktně vyjádřit.

Již staří Řekové znali tzv. zlatý řez, vyjádřený iracionálním číslem $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1,61803\dots$ viz oddíl Zlatý řez). Jeho využití najdeme zejména ve výtvarném umění – na obrazech, sochách, v architektuře, ale i v hudbě a v neposlední řadě se s ním setkáváme i v užitém designu věcí, které nás obklopují v každodenním životě, v přírodě, ve vesmíru. V praxi se většinou používají přibližné hodnoty, nejčastěji jsou to zlomky vytvořené podílem dvou sousedních čísel Fibonacciho posloupnosti, např. $3/2$, $5/3$, $8/5$. (Fibonacciho posloupnost tvoří čísla: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Obecně lze její n -tý člen vyjádřit jako součet dvou členů předcházejících: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Limita posloupnosti $a_{n+1}/a_n = \varphi$.)

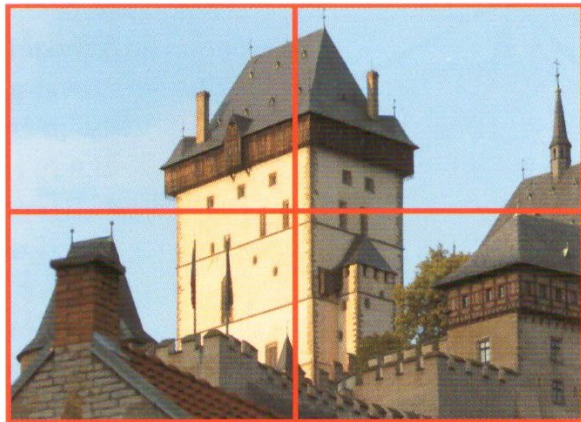
Při pátrání po zlatém řezu je třeba dodržet určitá pravidla. Je nutná přesnost při měření zkoumaných rozměrů. U budov je pak třeba znát jejich skutečné rozměry, není vhodné je odměřovat z fotografie, kde jsou zkreslené. Starověké stavby jsou navíc neúplné a většinou chybí původní dokumentace. Nesmíme zapomínat ani na to, že pokud nemáme jasný důkaz, že autor použil zlatý řez ve svém díle záměrně, pracujeme pouze s vlastními domněnkami.

Jistě jste už někdy fotografovali. Měly vaše fotky pěknou kompozici? Téměř v každé příručce o fotografování najdete jednoduché pravidlo: snímek bude působit příjemným a vyváženým dojmem, pokud důležitý objekt umístíme do zlatého řezu (obr. 5). Pravděpodobně to bude vypadat lépe a dynamičtěji, než kdyby stěžejní motiv byl přímo uprostřed snímku, což většinou působí příliš staticky (obr. 6). A pokud se vám fotka kompozičně tak docela nepovedla, lze to napravit třeba šikovým oříznutím snímku – některé grafické editory vám k tomu zlatý řez samy nabídnou.

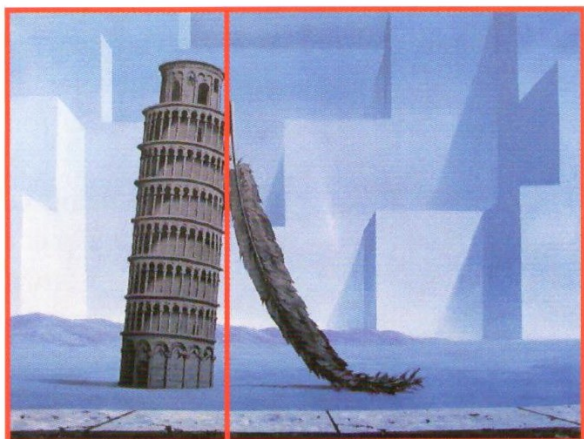
Na obrazech a grafických listech se můžeme se zlatým řezem setkat jednak u rozměrů obrazu, kdy plátno může mít tvar zlatého obdélníku (obr. 1), viz oddíl Zlatý řez, ale hlavně v kompozici díla. Zde platí stejné pravidlo jako u fotografie, bývá ale použité vícekrát a rafinovanějším způsobem. Šířku i výšku plátna rozdělíme zlatým řezem. Tím získáme dvě vodorovné a dvě svislé přímky, které se protínají ve čtyřech zlatých bodech (obr. 2). Tyto linie a body jsou vhodné pro členění obrazu a pro umístění důležitých objektů. Plochu lze zlatým řezem rozdělit opakovaně (obr. 3) nebo sestrojít pavučinu úhlopříček (obr. 4). Vzniklé síť jsou dynamické na rozdíl od dělení plochy v racionálních poměrech, které je příliš pravidelné a předvídatelné. Linie božského poměru jsou zřetelné na obraze *Noc v Pise* belgického surrealisty René Magritta (obr. 7), na obrázku chaty (obr. 8) nebo na historické pohlednici Neapole (obr. 9). Užití zlatého bodu je dobře vidět na mozaice s názvem *Sluneční vítr* (obr. 10). Vícenásobné členění plochy obrazu pomocí zlatého řezu často využíval pro své kompozice plzeňský malíř Karel Březina (obr. 11). Zlatý řez najdeme na obrazech holandského malíře Johannese Vermeera, francouzského pointilisty George Seurata, zakladatele op artu Victora Vasarelyho, představitele neoplasticismu Pieta Mondriana a mnoha a mnoha dalších.



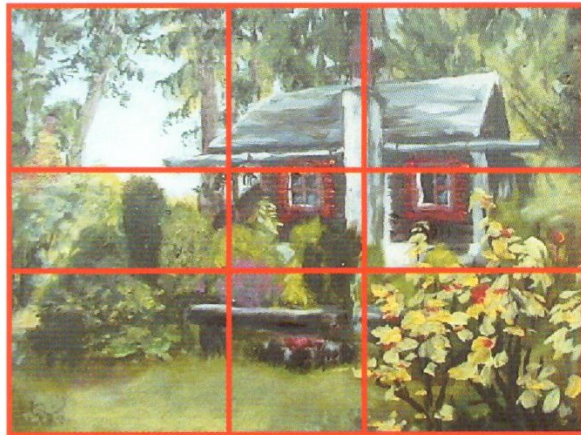
Obr. 5: Kompozice fotografie — zlatý řez



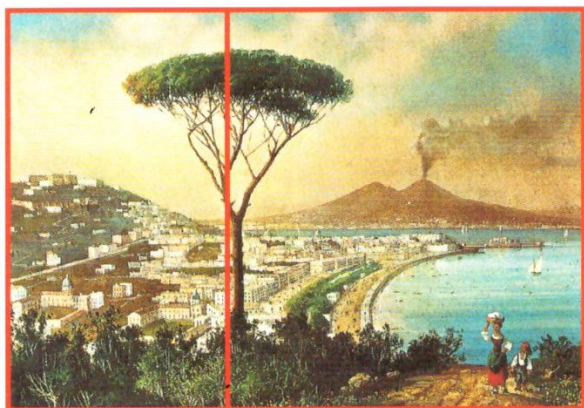
Obr. 6: Kompozice fotografie — střed



Obr. 7: Noc v Pise



Obr. 8: Chata



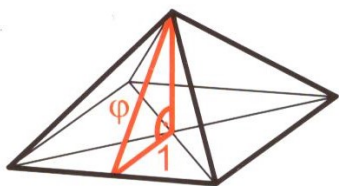
Obr. 9: Neapolský záliv



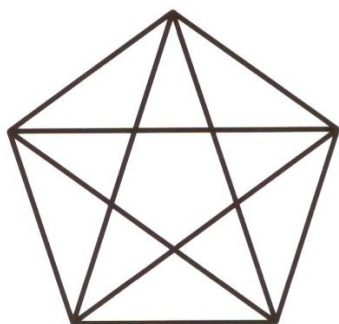
Obr. 10: Sluneční vítr



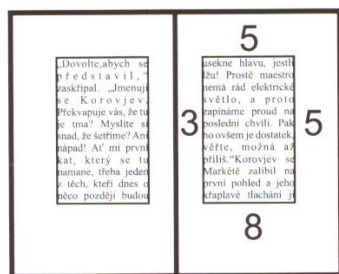
Obr. 11: Kypr



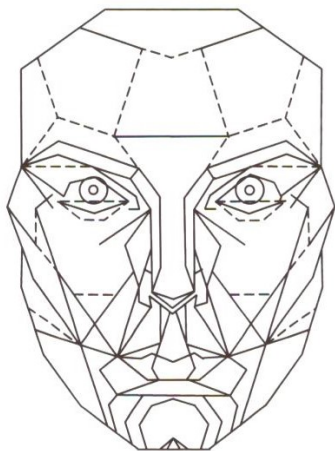
Obr. 12: Pyramida



Obr. 13: Pentagram



Obr. 14: Tiskové zrcadlo



Obr. 15: Šablona

Zlatý řez najde uplatnění také v sochařství, protože poměr některých proporcí lidského těla je blízký číslu ϕ . Antický sochař Feidiás tuto zásadu velmi striktně dodržoval a na jeho počest se zlaté číslo označuje právě počátečním písmenem jeho jména – řeckým písmenem ϕ .

V architektuře nacházíme zlatý poměr již ve starověku. Znali a používali zlatý řez staří Egyptané? Souvislost čísla ϕ s Cheopsovou pyramidou v Gíze je poněkud sporná už z toho důvodu, že pyramida vznikla kolem roku 2500 př. n. l. a matematická formulace zlatého řezu se poprvé objevuje až v 6. století př. n. l. v Eukleidových knihách o matematice nazvaných *Základy*. Nicméně platí, že poměr výšky trojúhelníkové stěny pyramidy ku polovině délky její základny $186,43:115,18 = 1,618...$ (obr. 12). Pravděpodobně je to jen důsledek obliby pentagramu (obr. 13) u Egyptanů. Podobně můžeme zkoumat i athénský Parthenón (obr. 16).

Severní průčelí pařížské katedrály Notre-Dame zlatými řezy rozhodně nešetří (obr. 17). Možná je to pouhá shoda okolností, ale katedrála rostla počátkem 13. století, tj. ve stejné době, kdy Leonardo Fibonacci formuloval v Pise svoji slavnou posloupnost.

V období renesance byl zlatý řez ve velké oblibě, Luca Pacioli ho nazval *divina proportio* – božský poměr – a renesanční umělci s ním často pracovali.

Francouzský architekt Le Corbusier na základě čísla ϕ vytvořil svůj modulor. Zlatý poměr je zřetelně patrný v proporcích jím navržené Villy Stein de Monzie v Garches z roku 1927 (obr. 19). Le Corbusier byl také spoluautorem návrhu budovy OSN v New Yorku, na které můžeme najít zlaté obdélníky (obr. 18).

Ani současní architekti zlatý řez nezavrhnou. Televizní věž CN Tower v kanadském Torontu je vysoká 553,33 metrů a její svislou linii přetíná ve výšce 351 metrů objekt vyhlídkové restaurace. Podíl těchto dvou rozměrů je $553:351 = 1,57...$, tedy číslo blízké hodnotě ϕ (obr. 20). Věže společnosti Petronas shlíží na malajské hlavní město Kuala Lumpur z výšky 452 metrů. Most spojující obě věže je ve výšce 170 metrů nad zemí, vzdálenost od mostu k vrcholu stavby je tedy 282 metrů. Pak už snadno vypočítáme hodnoty $452:282 = 1,6...$, $282 : 170 = 1,65...$ (obr. 21).

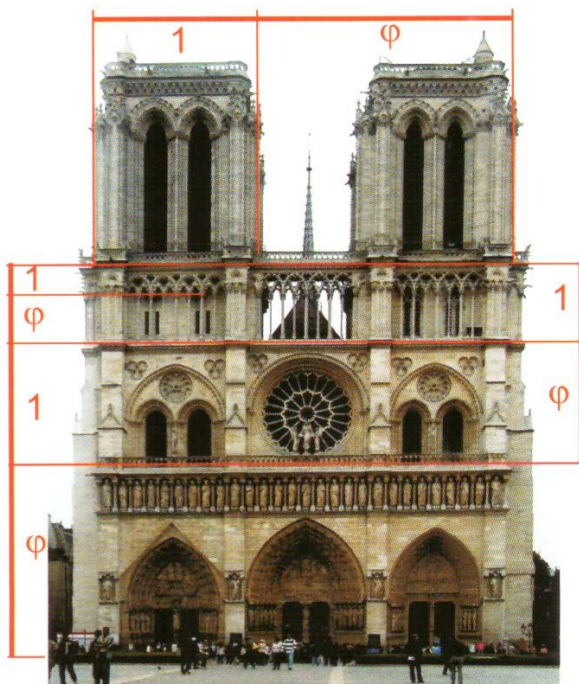
Další oblíbené a často používané poměry jsou například $\sqrt{2} : 1 = 1,4142135...$, $\sqrt{3} : 1$, $\sqrt{5} : 1$ atd. Známe také řez stříbrný $(\sqrt{2} + 1) = 2,4142135...$, bronzový $(\sqrt{13} + 3)/2 = 3,302775...$ a další. Všimněte si, že jsou to všechno iracionální čísla, evokující harmonii a dynamičnost. S těmito poměry se setkáváme v běžném životě. Například $\sqrt{2}$ a s ní spojený stříbrný řez jsou charakteristické pro normalizované formáty papíru a obálek. Formáty navštívenek se blíží zlatému obdélníku (obr. 1) stejně jako rozměry knih, rámců, paspart, kreditních karet, nábytku, hudebních nástrojů atd. Dříve bylo možné objevit Fibonacciho čísla také v knihách, kde určovala poměry velikostí nepotištěných okrajů stránek (obr. 14).

Jestliže zkoumáme vztah mezi zlatým řezem a krásou, nemůžeme vynechat přitažlivost lidských tváří. Kalifornský chirurg Stephen Marquardt během své praxe zjistil, že čím více se poměry určitých částí obličeje blíží číslu ϕ , tím jsou lidé hezčí. Ze sítě pravidelných pěti- a desetiúhelníků vytvořil šablonu (obr. 15), kterou přikládá na fotografie a zkoumá, do jaké míry se linie šablony shodují s rysy tváře (obr. 22).

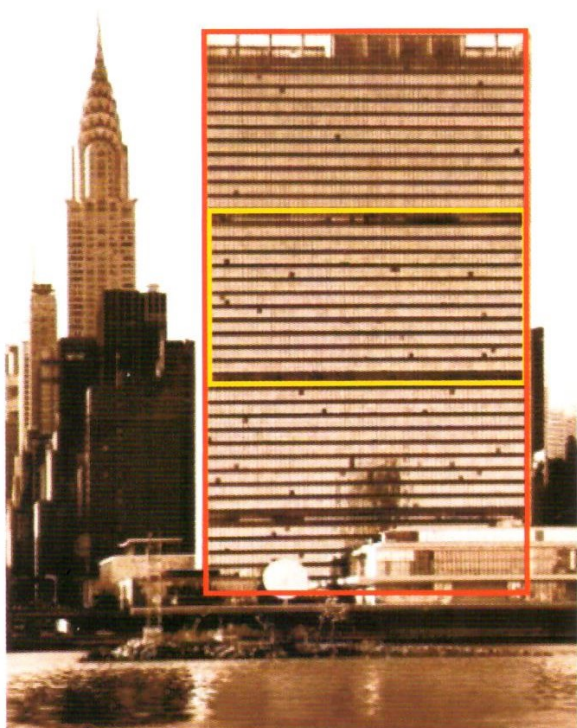
Existuje tedy vzorec pro výpočet krásy? Jistěže ne. Číslo ϕ není žádným univerzálním, obecně platným zákonem, jenž zaručuje vytvoření dokonalého díla. Bezpochyby je však užitečné zlatý řez znát. Je to číslo magické, nesmírně zajímavé a překvapující, které je s pozitivním estetickým pocitem nerozlučně spjato. Zlaté číslo je zakódováno v přírodě samé, v prostředí, které nás obklopuje a ovlivňuje, jehož jsme součástí – tedy je i v nás samotných. Nejspíše právě proto je nám tento poměr tak blízký a intuitivně nás stále přitahuje a okouzluje.



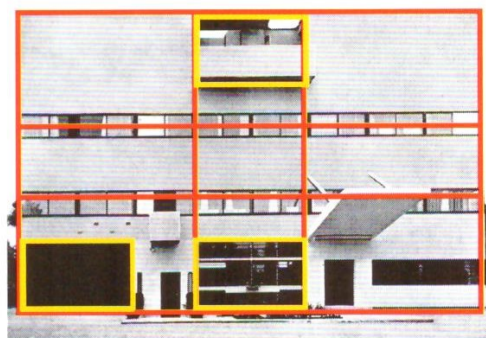
Obr. 16: Parthenón



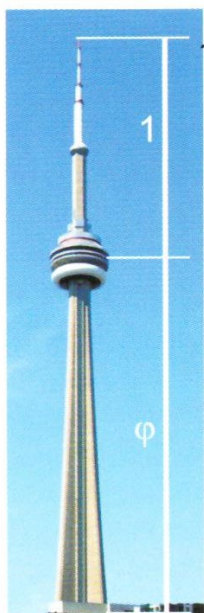
Obr. 17: Notre-Dame



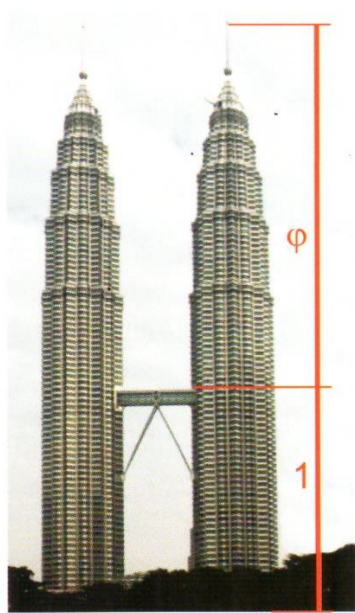
Obr. 18: Budova OSN



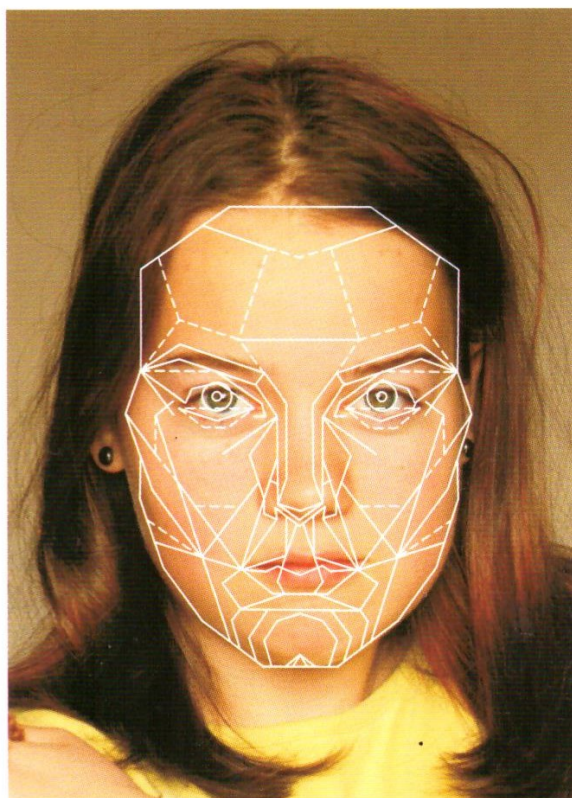
Obr. 19: Villa Stein



Obr. 20: CN Tower



Obr. 21: Petronas



Obr. 22: Použití šablony